ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA

ARGENTINA

DIRECTOR: JOSE S. GANDOLFO

MARZO - ABRIL 1961 — ENTREGAS III y IV — TOMO CLXXI

SUMARIO

Pág.

CARLOS RUSCONI. — El tercer trocanter en los indígenas jóvenes prehispánicos de mendoza 33

FÉNIX ROBERTO MARSICANO. — Sobre el problema restringido de cuatro cuerpos 41

CARLOS MARÍA ADOLFO RAITZIN. — Sobre una forma de las ecuaciones de la dinámica 50

BUENOS AIRES
AVDA. SANTA FE 1145

1961

COMMONWEALTH MYCOLOGICAL INSTITUTE
8 AUG 1961

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

SOCIOS HONORARIOS

Ing. Enrique Butty
Dr. Bernardo A. Houssay

Dr. Alberto Einstein †
Dr. Pedro Visca †
Dr. Mario Isola †
Dr. Germán Burmeister †
Dr. Benjamín A. Gould †
Dr. R. A. Phillippi †
Dr. Guillermo Rawson †

Dr. Carlos Berg †
Dr. Valentín Balbín †
Dr. Florentino Ameghino †
Dr. Carlos Darwin †
Dr. César Lombroso †
Ing. Luis A. Huergo †
Ing. Vicente Castro †
Dr. Juan J. J. Kyle †
Dr. Estanislao S. Zeballos †
Ing. Santiago E. Barabino †

Dr. Carlos Spegazzini †
Dr. J. Mendizábal Tamborel †
Dr. Walter Nernst †
Dr. Cristóbal M. Hicken †
Dr. Angel Gallardo †
Dr. Eduardo L. Holmberg †
Ing. Guillermo Marconi †
Ing. Eduardo Huergo †
Dr. Enrique Ferri †

JUNTA DIRECTIVA
(1960 - 1961)

Presidente ..... Ingeniero **Pedro Longhini**
Vicepresidente 1º ..... Doctor **Andrés O. M. Stoppani**
Vicepresidente 2º ..... Ingeniero Agrónomo **Arturo Burkart**
Secretario ..... Ingeniero **Jorge Cordeyro Echagüe**
Prosecretario ..... Doctor **César de la Vega**
Tesorero ..... Ingeniero **Edmundo Parodi**
Bibliotecario ..... Doctor **Fernando Modern**

Vocales Titulares:
Ingeniero **Juan José Carabelli**
Capitán de Navío **Emilio L. Díaz**
Doctor **Casimiro Lana-Sarrate**
Contralmirante **Edmundo Manera**
Ingeniero **Pedro Mendiondo**
Ingeniero **Ferruccio A. Soldano**
Ingeniero **Antonio E. Sturla**
Doctor **Reinaldo Vanossi**
Ingeniero **Julio Vela Huergo**

Vocales Suplentes:
Ingeniero **Guido Belzoni**
Doctor **I. Rafael Cordini**
Doctor **Emilio L. González**
Ingeniero **Ricardo R. Hertig**
Cap de Frag. **Luis M. Iriart**
Ingeniero **Alberto G. Urcelay**

Revisores de balances anuales:
Doctor **Antonio Casacuberta**
Ingeniero **Enrique G. E. Clausen**

SECCIONES DEL INTERIOR
Comisión Directiva

San Juan
Presidente
Doctor **Indalecio Carmona Ríos**
Vicepresidente
Ingeniero **Fernando Volponi**
Secretario
Doctor **Pablo A. Del Carril**
Tesorero
Cont. Púb. **Duilio S. Graffigna**
Vocales
Ingeniero **Ramón Ruiz Bates**
Ingeniero **Federico Rocha**
Doctor **Antonio Aguilar**

Santa Fe
Presidente
Ing. Quím. **Emilio A. Vergara**
Vicepresidente
Ing. Quím. **Nemesio de la Puente**
Secretario
Ing. Quím. **Juan A. Retamar**
Tesorero
Ing. Quím. **Enrique A. Virasoro**
Vocales
Doctor **Gustavo A. Fester**
Ing. Quím. **Guillermo Berraz**

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escritos. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. **Art. 10 del Reglamento de los "ANALES"** (modificado por la J. D. en su sesión de fecha 4 de 2eptiembre de 1941). Los escritos originales destinados a la Dirección de los "Anales", serán remitidos a la Gerencia de la Sociedad, avenida Santa Fe 1145, a los efectos de registrar la fecha de entrega para luego enviarlos al señor Director.

Impreso en el Establecimiento Gráfico "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 325 - Buenos Aires

EL TERCER TROCANTER EN LOS INDIGENAS JOVENES PREHISPANICOS DE MENDOZA

POR

CARLOS RUSCONI

I

Acerca del tercer trocánter femoral de los aborígenes extinguidos de Mendoza, di a conocer hace años una nota que se refería a la presencia de este tubérculo en los individuos adultos[1]. También señalaba su presencia en los jóvenes, pero el espacio publicitario no lo permitió.

II

El *Trochanter tertius* o tercer trocánter se lo encuentra más o menos desarrollado en representantes de numerosos grupos de mamíferos actuales, como en el caballo (*Equus caballus* L.), en varios subúrsidos; en algunos dasípodos como el peludo (*Chaetophractus villosus*), en el piche (*Zaedyus pichyi*), etc.

No pocos órdenes de mamíferos extinguidos lo poseen también: *Nesodon Sullivani* Ow. del Oligoceno de Patagonia; *Astrapotherium magnum* Ow. del Oligoceno; *Allalmeia atalaensis* Rusc. del Oligoceno de Mendoza; *Paedotherium imperforatum* (Amegh.) del plioceno de Bs. As. etc.

Además, el referido trocánter lo tienen varios grupos de primates y entre los monos americanos o platirrinos recordaré al mico de noche (*Aoutus boliviensis*) N.° 367 de la ex-colección Zoológica del autor; en los cai (*Cebus cirrifer* Geofr., N.° 344, de la ex-col. Zool. Rusc.); en los monos aulladores o carayás (*Alouatta nigra*, N.° 36 de la ex-col. Rusconi), etc.

(1) Carlos Rusconi, *El tercer trocánter en los indígenas prehispánicos de Mendoza*, en *Rev. Soc. Amigos de la Arqueología*, vol. X, pp. 2-7. Montevideo 1947.

III

También en el hombre el tercer trocánter se lo ve de distintas magnitudes y en un porcentual que varía de acuerdo a los grupos étnicos actuales o extinguidos o en estado fósil. En dicho proceso, como se sabe se inserta el glúteo mayor y otros ramos y que han sido dados a conocer por numerosos anatomistas: Waldeyer (1880), Houze (1884), Torok (1886), Costa (1890), etc.

Con respecto a los aborígenes sudamericanos, su presencia había sido señalada por varios autores. Torres lo recordó para los indígenas extinguidos del Delta del Paraná(1), y otros lo han hecho para grupos distintos. Mas recientemente, Cirio y Dellepiane volvieron a ocuparse del mismo asunto aunque utilizando individuos de raza blanca y de hospital(2). Pero nada se sabía con respecto a los aborígenes extinguidos de Mendoza sino después de haber dado detalles en ese sentido en varios opúsculos.

IV

Las observaciones practicadas sobre los indígenas extinguidos de Mendoza han arrojado mucha luz a ese respecto, no obstante que el dato relativo a la edad de los individuos juveniles no ha sido posible obtenerla sino mediante vía indirecta, como en el caso del estado de erupción de la dentadura; proporciones de la longitud de los huesos largos, estado de obliteración de los huesos craneanos y cuyo término de comparación ha sido basado con los materiales de la raza blanca.

Los fémures de individuos juveniles y jóvenes, como así también los demás huesos del esqueleto, son en verdad muy abundantes y casi todos provienen de enterratorios o de túmulos de Uspallata, de Lagunas del Rosario, levantados conjuntamente con restos de individuos adultos y de diferentes sexos. Pero de todos los fémures, solo recordaré aquí algunos casos típicos con la existencia del tercer trocánter.

Los fémures juveniles obtenidos de los túmulos El Canal (I, II y III) solo ilustro el correspondiente al N.° 1055 del Dep. de An-

(1) Luis M. Torres, *Los primitivos habitantes del Delta del Paraná*, p. 159, Bs. As. 1913.

(1) J. J. Cirio y L. Dellepiane, *El tercer trocánter del fémur humano*, etc. en *Primera Conferencia Nacional de Anatomía Nor. y Pat.*, vol. I, p. 551 y sig. Córdoba, 1943.

tropología del Museo de Mendoza, estimado en unos seis meses de edad y tiene una longitud femoral de 62 mm (fig. 1). En dicho especimen se advierte una pequeña cresta vertical situada hacia el lado externo del trocánter menor, esto es, en el lugar donde en otros fémures de adultos poseen un verdadero tubérculo. En el su-

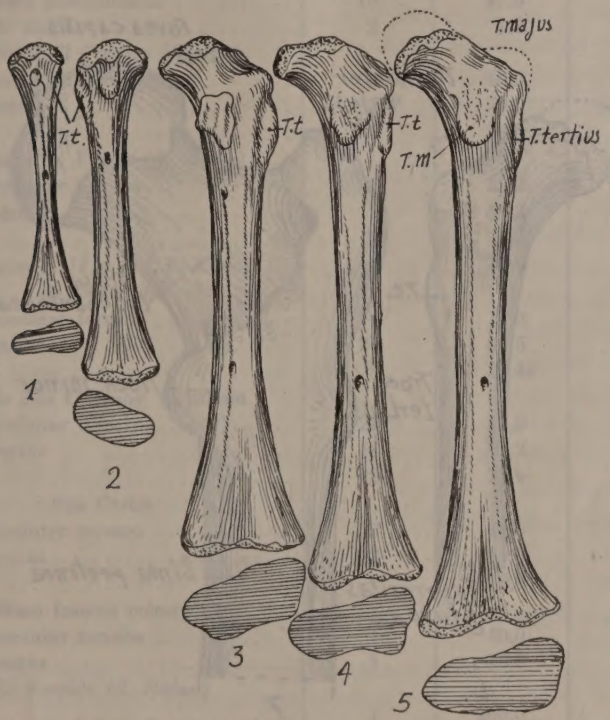


FIG. 1. — N° 1055, fémur de un individuo de un individuo de 6 meses con presencia del tercer trocánter. Túmulo III, Uspallata.
FIG. 2. — N° 350, individuo de unos 8 meses.
FIG. 3. — N° 354. individuo de 12 meses.
FIG. 4. — N° 356, individuo de 12 meses.
FIG. 5. — N° 370, individuo de 16 meses. Todos proceden del Osorio de Uspall. (x 2/3).

jeto de unos 8 meses existe un borde romo; en el de 12 meses, la cresta se halla más definida, y en otro de 16 meses no sólo hay tuberosidad sino que abajo existe una fosa alargada y situada hacia afuera de la gran cresta correspondiente a la línea áspera o glútea. En el individuo de 8 años (N.° 1049) el tercer trocánter es muy alargado y se destaca bastante del resto de la superficie circundante.

También en el túmulo II de El Canal hemos hallado varios indivi-

duos juveniles, como el N.° 236 de 12 meses cuyo cráneo está provisto aún de dos premolares de leche en función y tiene su fémur 109 mm de longitud. En el ejemplar de 10 años (N.° 238) con 312 mm de longitud femoral y medidos sin las epífisis proximal y distal, también posee dicho tubérculo bien desarrollado.

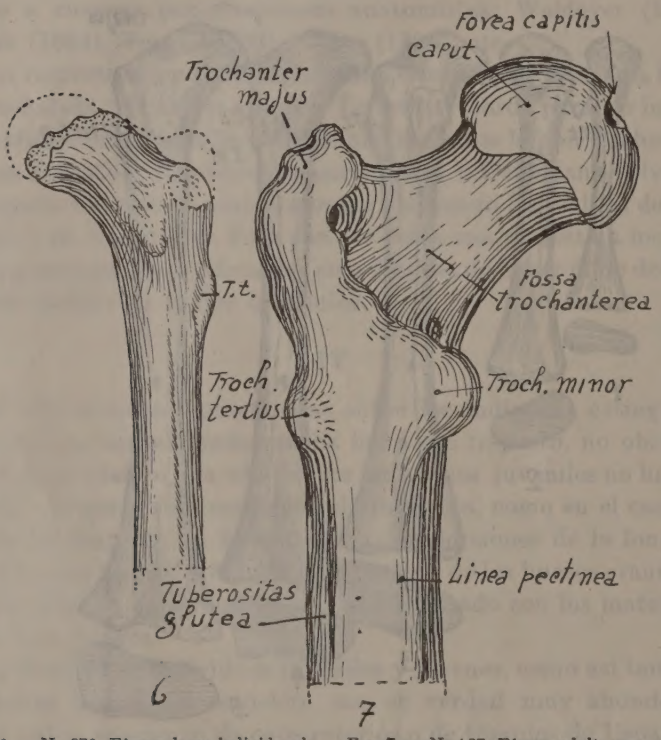


FIG. 6. — N° 376, Fémur de un individuo de unos 3 años. Osorio de Uspallata.

FIG. 7. — N° 537, Fémur adulto con el tercer trocanter. Uspallata (' x 2/3).

En el Osario de Uspallata es donde he reunido mayor número de fémures juveniles y de los cuales mencionaré los siguientes: Fémur N.° 350 de 80 mm de longitud (fig. 2), perteneciente a un individuo de unos 8 meses muestra una verdadera cresta con tendencia a la tuberosidad. En el fémur N.° 354, de 120 mm de longitud (fig. 3) y de un año de edad aprox. hay una cresta elevada que en proporción al tamaño del hueso resulta ser bastante grande puesto que tiene 2 mm de longitud con relación a la zona ósea ale-

Frecuencia del tercer trocánter en los indígenas de:

	Frec.	%	Observador Rusconi
Lagunas del Rosario			
Tienen trocánter tercero	12	50,0	
Tienen cresta pronunciada	10	41,6	
Carecen de ambas	2	8,3	
Túmulos El Paraíso (Maipú)			
Tienen trocánter tercero	2	40,0	
Tienen crestas	2	40,0	
Carecen	1	20,0	
Túmulos de Viluco (S. Carlos)			
Tienen trocánter tercero	2	33,3	
Tienen crestas	2	33,3	
Carecen	2	33,3	
Túmulos I, II y III El Canal de Uspallata			
Tienen trocánter tercero	8	19,0	
Tienen crestas	25	59,5	
Carecen	9	21,44	
Osario Las Colonias, Uspallata			
Tienen trocánter tercero	22	23,9	
Tienen crestas	48	53,2	
Carecen	22	23,9	
San Carlos			
Tienen trocánter tercero	2	40,0	
Tienen crestas	2	40,0	
Carecen	1	20,0	
Viluco (nueva colección)			
Tienen trocánter tercero	1	50,0	
Tienen crestas	1	50,0	
El Perdido (S. Rafael)			
Carece	1	100,0	
Sud de Rio Grande (Malalhue)			
Tienen trocánter tercero	2	100,0	
Las Barrancas (Maipú)			
Tienen trocánter tercero	4	40,0	
Tienen crestas	6	60,0	

NOTA: En este cuadro no se hallan computados los restos esqueléticos hallados por mí en las excavaciones del Zanjón de los Ciruelos, y los que se han obtenido durante estos últimos tiempos de excavaciones procedentes de diversos lugares del perímetro de la ciudad de Mendoza, y de los cuales también he podido advertir la presencia del referido trocánter.

daña. Tubérculos alargados también los poseen los fémures N.° 355 y 358, todos de un año de edad.

En los individuos de unos 14 meses (N.° 357, con 124 mm de longitud, y los números 363, 367, 359 y 358, tienen crestas o principios de un verdadero tubérculo, como en el caso del N.° 356, de 12 meses (fig. 4).

Los individuos de unos 16 meses con una longitud femoral que oscila entre los 131 y 143 mm, también se advierten detalles parecidos, y de los cuales el tercer trocánter se destaca en los fémures N.° 376 y 370 (fig. 5).

Ya en los individuos de 2 años (N.° 376) con una longitud de 170 mm, aparecen, a veces más definidos el tercer trocánter y algunos se elevan a más de 3 mm con respecto a la superficie ósea contigua, como lo evidencia el de la fig. 6. Finalmente, en los individuos adultos, el referido trocánter se lo encuentra en muchos muy bien desarrollado, N.° 317, 330, 332, 333, 338, 339. De ellos solo ilustro el número 337 (fig. 7).

De acuerdo al examen practicado, se desprende que algunos fémures poseen un verdadero trocánter tercero; otra serie poseen una cresta más o menos alargada y elevada y los hay que carecen por completo de ambas. El porcentual lo ofrezco en el cuadro anterior, advirtiendo que el número de casos se refiere a cada fémur y no a cada individuo, por el hecho de no haber sido posible hallar en varios casos el par de fémures juntos. Dicho porcentaje ha sido obtenido de individuos de todas edades, desde los 6 meses hasta los de edad provecta.

El promedio general del cuadro precedente es:

Tienen trocánter tercero	el 30 %
Tienen crestas más o menos desarrolladas	» 48 %
Carecen de ambas	» 21 %

CONCLUSION

Muy diversas tesis han sido auspiciadas para explicar el origen y función del tercer trocánter en el hombre. Unos la han atribuído a un factor hereditario; otros, como una acción mecánica y hay quienes ven en ese tubérculo un carácter o detalle patológico o una superabundancia de tejido óseo, etc.

Si bien es cierto que el hueso posee cierta plasticidad durante

su desarrollo intrauterino y hasta poco después el nacimiento, como lo han recordado Faldino, Fick, etc., que lo designa con el nombre de "plasticidad trófica", o de "adaptación funcional" según Roux, es evidente que la presencia de dicho tubérculo en nuestros aborígenes extinguidos mendocinos ha tenido una parte activa el factor hereditario.

Pues, si este trocánter (y en otros individuos solamente una eminencia ósea) estuviese presente en individuos adultos acostumbrados a determinados ejercicios de montaña, entonces habría motivos para considerarlo como de orígen estrictamente mecánico. Pero cuando el tubérculo se manifiesta en individuos jóvenes y juveniles casi en estado de lactancia, entonces el problema cambia de aspecto y permite suponer otra la causa, cual es por ejemplo, el factor hereditario como lo he recordado en mi artículo ya citado.

Dornuer, von Thorren, Hencke, Romiti, Falcone, etc., admitían que el origen de muchos tubérculos se debían a la especialísima función, o sea, desde los primeros períodos del desarrollo extrauterino, y contrarios, en parte, a los que se inclinan por el factor hereditario que buscan su origen en el plasma germinativo. La tesis auspiciada por Apostoloski vincula la formación de ciertos tubérculos, no a la función y desarrollo de la fuerza, sino más bien supeditada a una comodidad de los músculos, pero independientemente del medio o de la necesidad funcional.

Sabemos por otra parte, que un carácter adquirido a través de numerosas generaciones o durante el desarrollo ontogenético puede aparecer en sus descendientes. De allí entonces la participación de los genes en el plasma germinativo como factor hereditario y después que la función ha hecho al órgano.

Cuando el tercer trocánter se comprueba en individuos de raza blanca o en especímenes de hospital donde se carece a veces de la historia genealógica del individuo. En estos casos, las opiniones acerca del origen pueden dar lugar a interpretaciones diversas. Pero cuando el tubérculo en cuestión lo hallamos con cierta regularidad en individuos de diferentes edades (juveniles, jóvenes y adultos), pertenecientes a una agrupación étnica extinguida y de grupos sanguíneos más o menos puros, entonces no habría porque poner en duda el factor hereditario por cuanto ha sido la resultante de una función mecánica imprimida en sus antepasados que han actuado en condiciones ambientales propicias para el desarrollo

de determinados músculos y las consecuencias en las zonas óseas de adherencias, que han dado origen a la formación de crestas, transformadas, finalmente, en tubérculos más o menos destacados como en el caso del tercer trocánter.

Con esta tesis ya conocida, permite adelantar la creencia de que el tercer trocánter en los jóvenes aborígenes extinguidos de Mendoza, etc., se ha debido, en primer lugar, a un factor hereditario proveniente de grupos zoológicos de organización inferior y luego a condiciones ambientales y de necesidad que han permitido reactivar el detalle anatómico en cuestión. Luego, en el transcurso de su evolución filogenética, adquirió un relativo desarrollo para fijarse en muchos individuos como un elemento casi normal, como se lo observa con mucha frecuencia en numerosos grupos de mamíferos actuales y fósiles.

La ley de que *Todo órgano que desaparece no vuelve a aparecer* no creo que le pueda ser incompatible por cuanto el tercer trocánter lo hallamos con frecuencia en estado funcional en diversas agrupaciones humanas de organización anatómica inferior, actuales y fósiles. Dicho órgano que ha desaparecido casi por completo en la raza blanca, resulta que para estos últimos la presencia del tercer trocánter debería ser considerada mas bien, como una anomalía con reversión hacia la forma primitiva.

SOBRE EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE CUATRO CUERPOS

Por el Ing. Civil

FENIX ROBERTO MARSICANO

Summary. — The mothern theory of the moon (*), established long ago on a mechanical basis, has proved itself efficient enough to cape with the satellite's principal perturbations (**). The simplification consist of supposing negligible mass for the satellite with respect of the two attacting bodies (Sun and planet). This does no perturbate their movement which is circular uniform.

The solution proposed for the problem with three bodies shows the possibility of extending its use to solve the problem with four bodies (Three with ponderable mass and the other with negligible mass) as follows: a) The three attracting bodies moving according to Euler's lineal solution and the fourth in the invariable plane formed by the movement of the first three. b) The three attracting bodies moving according to Lagrange equilateral triangle solution and the fourth in the invariable plane formed by the movement of the first three.

Taking in each case (a and b) a rectangular relative coordinates with its origin in the baricentre of the attracting bodies and possessed of constant angular velocity, we have state the movement equations of the fourth body and the vis viva integral wich has helped us to trace the curves of zero velocity.

From these curves we deduct that for the first case there are six singular points (six positions of relative equilibrium) for the four body, while in the second case (Lagrange) there are eight of them, which are reduced to seven if the masses of the attracting bodies are equal. We have limited ourselves to the study of the curves of zero velocity without taking into consideration the stability conditions of the stationary solutions.

In these notes we wish to pay homage to the great Lagange who passed away nearly 150 years ago and to whose creative genius, celestial mechanics owes its most significant progress.

(*) G. Hill. "Researches in the Lunar theory". Amer. J. of Math. Vol. I, p. 5. 1878.

(**) "On the part of the Parallactic Inequalities in the Moon's Motion which is a function of the Mean Motions of the Sun and Moon". E. Brown. Amer. J. of. Math. V. XIV. p. 141. 1892.

"The Elliptic Inequalities in the Lunar Theory". Amer. J. of. Math. Vol. XV. 1893, ps. 244-321. E. W. Beown.

"On the part of the Motion of the Lunar Perigee wich is a function of the Mean Motions of the Sun and Moon". G. Hill. Acta Math. 8. 1886. p. 1.

1. *Caso de Euler.* — Si los tres cuerpos atrayentes son *R; T; S;* de masas mR = 20, mT = 1, mS = 10 (Fig. 1) y los disponemos de izquierda a derecha en línea recta; en ese órden, suponiendo la distancia RT igual a la unidad de longitud, se obtiene la distancia incógnita $TS = A$ por la ecuación de Euler (*)

$$(m_R + m_T)\, A^5 + (3\, m_R + 2\, m_T)\, A^4 + (3\, m_R + m_T)\, A^5 -$$
$$- (m_T + 3\, m_S)\, A^2 - (2\, m_T + 3\, m_S)\, A - (m_T + m_S) = 0 \quad \text{(I)}$$

que con los valores que hemos adoptado para las masas, se transforma en la siguiente ecuación numérica:

$$21\, A^5 + 62\, A^4 + 61\, A^3 - 31\, A^2 - 32\, A - 11 = 0 \quad \text{(II)}$$

que tiene una raíz real positiva igual a $\cong 0{,}76$.

En cuanto a la distancia X entre el punto R y el Baricentro G (Fig. 1) se halla por la ecuación:

$$(m_R + m_S + m_T)\, X = m_T \,.\, 1 + m_S\, (1 + A) \quad \text{(III)}$$

de donde $X \cong 0{,}6$.

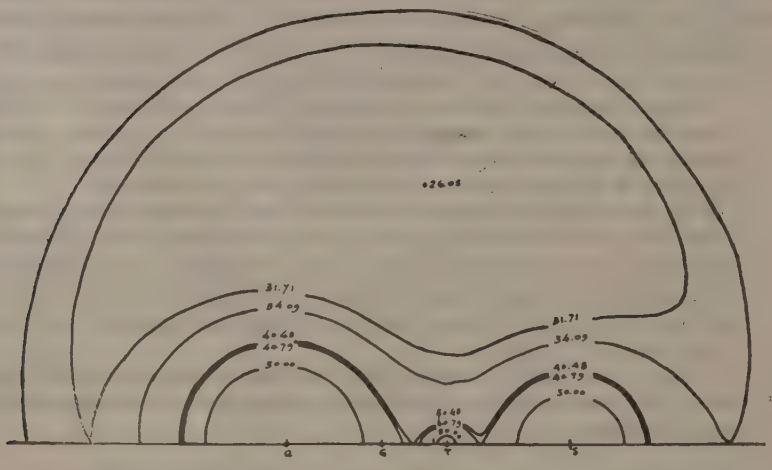


FIG. 1.

Tomamos la constante de atracción universal igual a la unidad y planteamos para cada punto (RST) la condición de equilibrio

(*) Celestial Mechanics, 2.ª Ed. F. R. Moulton, p. 312.

relativo, señalamos con ω el módulo de la rotación constante de los tres cuerpos alrededor de G, con lo que se tiene:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{m_R m_T}{1^2} + \frac{m_R m_S}{(1+A)^2} - \omega^2 m_R X = 0 \\ &\frac{m_T m_R}{1^2} - \frac{m_T m_S}{A^2} - \omega^2 m_T (1 - X) = 0 \\ &\frac{m_S m_R}{(1+A)^2} + \frac{m_S m_T}{A^2} - \omega^2 m_S (1 + A - X) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(IV)}$$

que con los valores numéricos adoptados conduce a las tres ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} &1 + 10/\overline{1{,}76}^2 - \omega^2 0{,}6 = 0 \\ &20 - 10/\overline{0{,}76}^2 - \omega^2 0{,}4 = 0 \\ &20/\overline{1{,}76}^2 + 1/\overline{0{,}76}^2 - \omega^2 1{,}16 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(V)}$$

que se satisfacen para el común valor $\omega^2 \cong 7$. Si tomamos una terna de referencia con origen en el baricentro G y con versores $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ tal que $\mathbf{i}_1$ tenga la dirección y el sentido T—G; $\mathbf{j}_1$ dirección normal a $T - S$ y en el plano del movimiento y $\mathbf{k}_1 = \mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{j}_1$; la ecuación vectorial del movimiento relativo de un punto L de masa mL que se mueve en el plano $\mathbf{i}_1\mathbf{j}_1$ es:

$$m_L \mathbf{A}_r = \frac{m_R m_L}{|L-R|^3}\overrightarrow{R-L} + \frac{m_T m_L}{|T-L|^3}\overrightarrow{T-L} + \frac{m_L m_S}{|S-L|^3}\overrightarrow{S-L} + m_L \omega^2 \overrightarrow{L-G} + 2 m_L \mathbf{V}_r \wedge \omega \mathbf{k}_1 \quad \text{(VI)}$$

Donde $\mathbf{V}_r$ y $\mathbf{A}_r$ son la velocidad y la aceleración relativas de L. Multiplicando la (VI) escalarmente por $\mathbf{V}_r$ e integrando con respecto al tiempo, se obtiene la integral de las fuerzas vivas:

$$\frac{1}{2}\mathbf{V}_r^2 = U + \frac{1}{2}\omega^2 \rho^2 + C \quad \text{(VII)} \qquad C = \text{constante} \qquad \rho = |L-G|$$

$$\rho_R = |L-R| \qquad \rho_T = |L-T| \qquad \rho_S = |L-S|$$

$$U = \frac{m_R}{\rho_R} + \frac{m_T}{\rho_T} + \frac{m_S}{\rho_S}$$

U función potencial newtoniana y $\frac{1}{2}\omega^2\rho^2$ función potencial de arrastre.

Si en (VII) hacemos $V_r = 0$ tenemos:

$$\frac{m_R}{\rho_R} + \frac{m_T}{\rho_T} + \frac{m_S}{\rho_S} + \frac{1}{2}\omega^2\rho^2 = C^* \qquad C^* = -C \qquad \text{(VIII)}$$

y si expresamos ρ_T y ρ en función de ρ_R y ρ_S nos queda una función en ρ_R y ρ_S que nos da en coordenadas bipolares, las curvas de velocidad relativa nula, es decir, las curvas que separan al plano $\mathbf{i}_1\,\mathbf{j}_1$ en zonas en las cuales $V^2 > 0$ y por lo tanto puede existir movimiento y en zonas en las cuales $V^2 < 0$ donde el movimiento es imposible.

La ecuación que resulta es de quinto grado en $\rho_S\,\rho_R$; en efecto multiplicando la (VIII) por $\rho_T\,\rho_S\,\rho_R$ queda:

$$m_R\,\rho_T\,\rho_S + m_T\,\rho_R\,\rho_S + m_S\,\rho_R\,\rho_T + \frac{1}{2}\rho^2\,\rho_S\,\rho_T\,\rho_R = C^*\rho_S\,\rho_T\,\rho_R \qquad \text{(IX)}$$

Por otra parte llamando xy las coordenadas cartesianas de L y a, b, c, los segmentos $|R-S|$; $|T-S|$; $|T-G|$ se tiene:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2 \\ \rho^2_R &= \rho^2 + 2\,xa + a^2 \\ \rho^2_S &= \rho^2 + b^2 - 2\,bx \end{aligned}$$

despejando x, ρ de las dos últimas:

$$x = \frac{\rho^2_S - \rho_R{}^2 - b^2 + a^2}{-2\,(a+b)} \qquad \text{(X)}$$

$$\rho^2 = \rho^2_R\,[1 - a/(a+b)] + a\rho^2_S/(a+b) - a^2 - \frac{ab^2}{a+b} + \frac{a^3}{a+b}$$

Además

$$\rho^2_T = y^2 + (x-c)^2$$

Luego

$$\rho^2_T = \rho^2_R\left(1 - \frac{a+c}{a+b}\right) + \rho^2_S\,\frac{a+c}{a+b} - a^2 - \\ - \frac{ab^2}{a+b} + \frac{a^3}{a+b} + c^2 - \frac{cb^2}{a+b} + \frac{ca^2}{a+b} \qquad \text{(XI)}$$

Reemplazando (X) (XI) en (IX) se obtiene una ecuación en las únicas variables $\rho_S \rho_R$ cuya solución es muy complicada, por lo cual nos hemos decidido a utilizar un método primitivo pero eficaz cual es el de cubrir el plano con los números resultantes de efectuar las operaciones indicadas en el primer miembro de la ecuación (VIII) y luego unir los puntos de igual valor, afinando los cálculos en las proximidades de los puntos singulares.

Así por ejemplo, los valores grandes de $C^*(C^* = 50)$ se agrupan en cuatro ramas: Un óvalo que envuelve a R, otro a S, otro a T y un óvalo que envuelve a todos (No dibujado en la figura).

Para valores menores de C^*, los óvalos interiores aumentan de tamaño y se deforman juntándose dos de ellos para $C^* = 40{,}79$ obteniéndose un punto de equilibrio relativo situado a la distancia $\cong 0{,}21$ de T, mientras que el óvalo exterior disminuye de tamaño.

Para $C^* = 40{,}48$ la curva que envuelve a T y a S entra en contacto con el óvalo que circunda a R obteniéndose el segundo punto singular situado a la distancia $\cong 0{,}215$ de T.

Para valores menores de C^* se obtiene una rama que envuelve a los tres puntos R, S, T, y un óvalo exterior, hasta que para $C^* = 34{,}09$ ambas ramas se tocan produciéndose el tercer punto singular a una distancia $\cong 0{,}95$ de S.

Para $C^* = 31{,}71$ se obtiene el cuarto punto singular y la única rama de la curva queda dividida en dos, a través del mismo, situado a la distancia $\cong 1{,}285$ de R.

A partir de $C^* = 31{,}71$ las ramas se hacen mas y mas pequeñas hasta que desaparecen para $C^* = 26{,}05$ a lo largo de dos puntos que forman aproximadamente dos configuraciones triangulares equiláteras con R y S.

Desde luego que las cosas se modifican algo si elegimos otros valores de las masas o bien si permutamos el orden R, S, T, de los puntos atrayentes.

2. *Caso de Lagrange.* — Si fijamos los tres cuerpos atrayentes según los vértices de un triángulo equilátero de lado unitario (Fig. 2), la rotación del conjunto alrededor del baricentro G viene dada por la fórmula de Lagrange (*):

$$\omega^2 = m_S + m_R + m_T = 10 + 20 + 1 = 31$$

(*) "Essai sur le probleme de Trois corps". Oeuvres, t. 6, p. 229.

donde se ha supuesto unitaria la constante de atracción universal.

La posición del baricentro de los tres cuerpos atrayentes R, S, T queda definido por el vector $\overline{G-S}$:

$$(m_S + m_R + m_T)\ \overline{G-S} = m_R\ \overline{R-S} + m_T\ \overline{T-S}$$

de donde

$$G - S = \frac{20\ \overline{R-S^0} + \overline{T-S^0}}{31}$$

ya que $\overline{R-S}$ y $\overline{T-S}$ tienen módulo unidad y $m_i = 1$.

Fig. 2.

Tomando una terna de referencia con origen en el baricentro G y con versores $\mathbf{i}_1 = \overline{T-S^0}$; $\mathbf{j}_1$ normal a $\mathbf{i}_1$ y $\mathbf{k}_1 = \mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{j}_1$, o sea una terna relativa solidaria con los tres cuerpos atrayentes, la ecuación

del movimiento relativo de un punto L de masa m_L situado en el plano $\mathbf{i}_1\mathbf{j}_1$ es

$$m_L \mathbf{A}_r = \frac{m_R m_L}{|L-R^3|}\overline{R-L} + \frac{m_T m_L}{|T-L^3|}\overline{T-L} + \frac{m_S m_L}{|S-L|^3}\overline{S-L} + \omega^2 m_L \overline{L-G} + 2 m_L \mathbf{V}_r \wedge \omega \mathbf{k}_1 \quad \text{(I)}$$

donde los símbolos tienen el mismo significado que en el capítulo 1).

Multiplicando la (I) escalarmente por $\mathbf{V}_r$ e integrando se obtiene la integral de las fuerzas vivas: de la cual para $\mathbf{V}_r = 0$ se llega a la ecuación de las curvas de velocidad nula.

$$\frac{m_R}{\rho_R} + \frac{m_T}{\rho_T} + \frac{m_S}{\rho_S} + \frac{1}{2}\omega^2\rho^2 = C \quad \text{(II)}$$

C = constante

$\rho = |L-G|$

$\rho_R = |L-R|$

$\rho_T = |L-T|$

$\rho_S = |L-S|$

También en (II) pueden reemplazarse ρ_T y ρ por sus valores en función de ρ_R y ρ_S con solo resolver triángulos, pero no es lícito en este caso usar coordenadas bipolares por cuanto las curvas no son simétricas respecto al eje RS: de manera que se impone el mismo método gráfico usado en (1), para ello usamos la (II) con valores numéricos.

$$\frac{20}{\rho_R} + \frac{1}{\rho_S} + \frac{10}{\rho_T} + \frac{31}{2}\rho^2 = C \quad \text{(III)}$$

Para cada punto del plano quedan determinados ρ_R; ρ_T; ρ_S y ρ en la escala $|R-S| = |R-T| = S-T| = 1$ y por la (III) también queda determinada la constante C; uniendo luego con trazo contínuo los puntos de igual valor C se obtienen las curvas de velocidad nula.

El resultado de estos cálculos se ve en figura 2. Para valores grandes de C (Por ejemplo $C = 70$) se obtienen cuatro ramas: tres óvalos que envuelven respectivamente a R, S y T y un óvalo que circunda a los tres.

Disminuyendo el valor de C, los óvalos internos aumentan de tamaño hasta que para $C \cong 60$ los que circundan a R y S se tocan

en un punto (Curva en forma de ocho) obteniéndose el primer punto singular; a su vez el óvalo externo disminuye de tamaño.

Para $54{,}4 < C < 60$ existen sólo tres ramas: Un óvalo que envuelve a T (centro de menor masa); una curva que envuelve a R y S y un óvalo exterior que circunda a los tres puntos R-S-T, hasta que para $C \cong 54{,}4$ estas dos últimas ramas se tocan en un punto situado aproximadamente en la línea RS y en oposición a R (Segundo punto singular).

Para $54{,}17 < C < 54{,}4$ existen dos ramas: Un óvalo alrededor de T y una curva en forma de herradura no simétrica y con la parte media delgada. Para $C \cong 54{,}17$ la herradura se estrangula en su parte media formando el tercer punto singular.

Para $47{,}8 < C < 54{,}17$ vuelven a existir tres ramas: Un óvalo que envuelve a T; una curva alargada que se desarrolla en el semiplano de orígen RS; que no contiene a T y otra rama parecida que circunda a T, de manera que en este caso el centro atrayente T de menor masa queda circundado por dos curvas que no se tocan, por lo que si inicialmente el cuarto cuerpo L estaba dentro del óvalo interior no puede salir de él y si estaba fuera de la rama exterior no puede entrar, mientras que de ninguna manera puede estar en la corona que tiene como límite ambas ramas.

Para $C \cong 47{,}8$ las dos ramas que envuelven a T se tocan en un punto, obteniéndose la cuarta posición de equilibrio relativo.

Para $42{,}2 < C < 47{,}8$ hay sólo dos ramas: Una curva en forma de herradura muy deformada con la parte media delgada y una curva alargada que circunda a un punto que forma aproximadamente una configuración equilátera con R y S.

Para $C \cong 47{,}2$ la herradura se estrangula obteniéndose el quinto punto singular situado aproximadamente en la línea GT y en oposición a G.

Para $45{,}4 < C < 47{,}2$ los extremos de la herradura anterior pasan a formar dos curvas cerradas a ambos lados de T mientras que la tercer rama disminuye aun mas sus dimensiones.

Para $C \cong 45{,}4$ la curva situada a un lado de T, precisamente la mas cercana a S desaparece transformándose en el sexto punto singular.

Para $C \cong 44{,}9$ desaparece la curva del otro lado de T (Séptimo punto singular).

Para $C \cong 43{,}4$ desaparece la última rama transformándose en

el octavo punto singular que forma con R y S un casi triángulo equilátero.

Para $C < 43{,}4$ todo el plano puede ser recorrido por el cuarto cuerpo L.

De lo expuesto se deduce que para que el cuarto cuerpo L pueda desplazarse en las zonas cercanas a R, S y T indistintamente es necesario que $C < 47{,}8$; también puede irse al infinito de manera que no existe límite superior para

$$\rho_S \; ; \quad \rho_R \; ; \quad \rho_T \; ; \quad \rho \, .$$

En cambio para $C < 60$ existe límite superior e inferior para las cuatro distancias ρ_S; ρ_R; ρ_T; ρ según esté inicialmente L en las cercanías de S, R, T, o bien fuera del óvalo exterior correspondiente.

Para $47{,}8 < C < 54{,}4$ no existe límite superior para ρ_R y ρ_S pero si para ρ_T que también tiene límite inferior.

Las distancias a las cuales se encuentran los puntos singulares pueden hallarse directamente de la figura con un escalímetro tomando como unidad de longitud

$$|R - S| = |R - T| = |S - T| = 1 \, .$$

Si dos masas son iguales, por ejemplo S y R, existe un eje de simetría que pasa por el tercer punto T y es normal a $\overline{R-S}$; además cuatro de los puntos singulares aparecen simultáneamente dos a dos si $m_t < m_S = m_R$. Y seis aparecen simultáneamente dos a dos si $m_T > m_S = m_R$.

Si las tres masas son iguales existen sólo siete puntos singulares, el primero de los cuales coincide con G y los otros aparecen simultáneamente tres a tres. En este caso basta efectuar los cálculos para un sector con orígen G y que tenga como fronteras la semirrecta G—S y la semirrecta con origen G y normal a ST es decir dentro de un ángulo de 60°. Luego por simetría se pueden completar las curvas. Tres de los puntos singulares están situados en las semirrectas GS; GR; GT; y los otros tres en las semirrectas de orígen G y normales a RS, RT y ST.

Trabajo realizado en función del contrato con el Consejo Nacional de Investigaciones C. y T.

SOBRE UNA FORMA DE LAS ECUACIONES DE LA DINAMICA

POR

CARLOS MARIA ADOLFO RAITZIN

Sea un sistema dinámico holónomo definido por su Lagrangiano y del que supondremos momentáneamente el número de coordenadas generalizadas q_i coincide con el de grados de libertad.

Vamos a aplicar una transformación del tipo de la de Poisson-Hamilton y que recae también (bajo el aspecto matemático) dentro del tipo denominado de Legendre.

Introduciendo las variables

$$r_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{1}$$

definamos una función **R** (donde $s_i = \dot{q}_i$) por

$$\mathbf{R}(r_i;\ s_i;\ t) = L - \sum_i q_i r_i \tag{2}$$

donde L es el Lagrangiano.

La variación de la misma para un instante t fijo (es decir para una variación virtual de los parámetros r_i y s_i) estará dada por

$$\delta \mathbf{R} = \sum_i \left(\frac{\delta L}{\delta q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i - q_i \delta r_i - r_i \delta q_i \right) =$$

$$= \sum_i (p_i \delta \dot{q}_i - q_i \delta r_i) = \sum_i (p_i \delta s_i - q_i \delta r_i) \tag{3}$$

Lo anterior expresa el hecho de que, si es posible efectuar la transformación definida antes, la variación de **R** podrá ser expresada en función únicamente de las r_i, s_i y sus correspondientes variaciones.

Vamos a demostrar que se cumple.

$$\begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r_i} \\ p_i &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s_i} \end{aligned} \tag{4}$$

En efecto

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r_i} &= -q_i + \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial q\,\alpha} - r\,\alpha \right) \frac{\partial q\,\alpha}{\partial r_i} = -q_i \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s_i} &= \frac{\partial L}{\partial s_i} + \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial q\,\alpha} - r\,\alpha \right) \frac{\partial q\,\alpha}{\partial s_i} = p_i \end{aligned} \tag{5}$$

C. Q. D.

Obsérvese la simetría de las expresiones respecto a las ecuaciones canónicas de HAMILTON.

$$r_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (*) \qquad s_i = \frac{\partial H}{\delta p_i}$$

Esta propiedad de simetría era sin embargo previsible en función de las propiedades de la transformación de LEGENDRE.

En rigor, las expresiones (4) son ecuaciones integrales. Las podemos transformar en ecuaciones diferenciales, derivando totalmente respecto del tiempo.

Obtiénese así como expresión de las ecuaciones del movimiento

$$\begin{aligned} s_i &= -\frac{d}{dt}\,\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r_i} \\ r_i &= \frac{d}{dt}\,\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s_i} \end{aligned} \tag{6}$$

Desarrollando estas últimas obtenemos

$$\begin{aligned} -s_i &= \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial r_i\,\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial r_i\,\partial r_k}\,\frac{dr_k}{dt} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial r_i\,\partial s_k}\,\frac{ds_k}{dt} \right) \\ r_i &= \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial s_i\,\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial s_i\,\partial r_k}\,\frac{dr_k}{dt} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial s_i\,\partial s_k}\,\frac{ds_k}{dt} \right) \end{aligned} \tag{7}$$

(*) Se observa que por las ecuaciones de Lagrange obtenemos inmediatamente $\frac{\mathrm{dpi}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{r_i}$.

Surge de esto una consecuencia interesante.
Las

$$\frac{dr_k}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{ds_k}{dt}$$

pueden ser obtenidas de las expresiones (7) consideradas como un sistema de $2n$ ecuaciones lineales respecto a esas incógnitas. El determinante del mismo será

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{r_1 r_1} & R_{r_1 r_2} \ldots R_{r_1 r_n} & R_{r_1 s_1} \ldots R_{r_1 s_1} \\ R_{r_2 r_1} & R_{r_2 r_2} \ldots R_{r_2 r_n} & R_{r_2 s_1} \ldots R_{r_2 s_n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ R_{s_1 r_1} & R_{s_1 r_2} \ldots R_{s_1 r_n} & R_{s_1 s_1} \ldots R_{s_1 s_n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ R_{s_n r_1} & R_{s_n r_2} \ldots R_{s_n r_n} & R_{s_n s_1} \ldots R_{s_n s_n} \end{vmatrix} \tag{8}$$

Se observa en consecuencia que el sistema es simétrico y, que además, $\Delta \neq 0$ pues sino los parámetros que definen el sistema no serían independientes contra lo supuesto.

En razón de la simetría señalada las ecuaciones (6) pueden ser consideradas como las derivadas parciales respecto a las $\dot{r}_i$ y $\dot{s}_i$ (consideradas un momento como variables independientes) de una cierta función M de segundo grado en las mismas. Y como estas derivadas parciales están igualadas a cero se puede formular un principio extremal.

"El movimiento de un sistema holónomo de n grados de libertad se efectúa siempre de tal manera, que las $\dot{r}_i$ y $\dot{s}_i$ hacen estacionaria respecto a las mismas a una determinada función M".

Obviamente, M será de la forma.

$$M(s_i; r_i; \dot{s}_i; \dot{r}_i; t) = \frac{1}{2} \sum_i [R_{r_i r_i} \dot{r}_i^2 + R_{s_i s_i} \dot{s}_i^2] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_i \sum_j [R_{r_i r_j} \dot{r}_i \dot{r}_j + R_{s_i s_j} \dot{s}_i \dot{s}_j] + \sum_i \sum_j R_{r_i s_j} \dot{r}_i \dot{r}_j$$

$$+ \sum_i \{[R_{r_i t} + s_i] \dot{r}_i + [R_{s_i t} - r_i] \dot{s}_i\} = 0 \tag{9}$$

Como consecuencia de lo anterior las ecuaciones del movimiento podrán ser escritas en la forma.

$$\frac{\partial M}{\partial \dot{s}_i} = 0 \qquad \frac{\partial M}{\partial \dot{r}_i} = 0 \tag{10}$$

COORDENADAS IGNORABLES Y LAS NUEVAS ECUACIONES

Si una coordenada generalizada q_i no aparece explícitamente en el Lagrangiano (aunque aparezca $\dot{q}_i$) se denomina como es sabido ignorable. Se cumplirá evidentemente

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

En este caso se sigue que $p_i = \text{cte}$ y la variable correspondiente podrá ser eliminada ("ignorada") de las ecuaciones del movimiento.

En las ecuaciones que acá presentamos tendremos que, en ese caso, r_i no aparecerá en **R**. Se sigue que

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s_i} = \text{cte}.$$

El sistema de orden $2n$ se reduce a otro de $2n-2$. La expresión

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s_i} = \text{cte}$$

debe ser considerada como integral primera del sistema (6).

Análogamente, si s_i no aparece en **R**, es inmediato que $q_i = \text{cte}$.

Podemos dar la siguiente regla:

"S" $\left\{ \begin{matrix} r_i \\ s_i \end{matrix} \right\}$ no aparece en **R**, será $\left\{ \begin{matrix} p_i \\ q_i \end{matrix} \right\} = \text{cte}$ y

$$\left\{ \begin{matrix} \dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial s_i} = \text{cte} \\ \dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial r_i} = \text{cte} \end{matrix} \right\}$$

una integral primera del sistema (6)".

Hay otra simplificación útil. Si

$$r_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

no contiene a la variable q_i (cosa que sucede cuando L es lineal en la misma) el r_i correspondiente no aparecerá en la función.

En efecto, será (denominado q_h a la q_i con la que esto acontece)

$$\mathbf{R} = f\,[r_i;\ s_i;\ t] + \frac{\partial L}{\partial q_h}\,q_h - r_h q_h = f\,[r_i;\ s_i;\ t]$$

$$[i = 1,\ 2,\ \ldots\ (n-1)]$$

RELACION ENTRE R Y EL HAMILTONIANO

Tenemos que se cumple

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r_i} &= s_i = \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ +\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s_i} &= r_i = \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \qquad (11)$$

como se deduce inmediatamente de lo anterior.

Por otro lado, si derivamos totalmente a **R** respecto al tiempo, obtenemos

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s_i}\frac{ds_i}{dt} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r_i}\frac{dr_i}{dt} =$$

$$= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \sum_i p_i \ddot{q}_i - q_i \ddot{p}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \frac{d}{dt}\sum_i p_i \dot{q}_i - q_i \dot{p}_i \qquad (12)$$

Si en particular, **R** no depende del tiempo explícitamente, la anterior se reduce a

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i p_i \dot{q}_i - q_i \dot{p}_i \qquad (13)$$

o en consecuencia

$$\mathbf{R} = \sum_i p_i \dot{q}_i - q_i \dot{p}_i + \text{cte} \qquad (14)$$

que equivale a nueva demostración de las relaciones fundamentales para un caso particular.

Bajo la misma hipótesis restrictiva, teniendo en cuenta las ecuaciones de HAMILTON, se cumplirá

$$\mathbf{R} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} q_i \right) + \text{cte} \qquad (15)$$

debiendo observarse que **R** va expresada en las r_i y s_i.

De la última expresión, se deduce que si H (además de no depender del tiempo explícitamente, y ser en consiguiente una constante del movimiento) es homogéneo en las p_i y q_i (*y a fortiori* lo será de segundo grado en ese caso), **R** también será una constante del movimiento. Esto es una consecuencia del teorema de EULER relativo a las formas homogéneas.

Queda claro además, que si H es constante, por simple cambio de variables proporciona una integral primera del sistema (6).

Esto no supone homogeneidad del mismo.

Tenemos que

$$\mathbf{R} = L - \sum_i q_i r_i = \sum_i p_i \dot{q}_i - H - \sum_i q_i r_i$$

y por tanto H será

$$H = \sum_i \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s_i} s_i + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r_i} r_i \right) - \mathbf{R} = \text{cte}$$

que será la integral de las fuerzas vivas en la nueva formulación.

En caso de existir variables ignorables estas expresiones podrán simplificarse de acuerdo a la regla dada oportunamente.

De la última expresión dada más arriba, se observa que si **R** es homogénea, será

$$H = \frac{\mathbf{R}}{2} = \text{cte} \qquad (17)$$

Des esto y la relación inversa vista anteriormente, se sigue que existe relación recíproca de homogeneidad entre H y **R**.

En otros términos si H es homogéneo **R** también lo será, y recíprocamente.

Cabe aclarar que la expresión

$$H = \sum_i \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r_i} r_i + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s_i} s_i \right) - \mathbf{R} \qquad (18)$$

es perfectamente general, dependan o no H y **R** del tiempo.

PRINCIPIO DE HAMILTON MODIFICADO

Con la técnica euleriana del cálculo de variaciones un principio extremal derivado del de HAMILTON puede ser establecido. Veremos que las condiciones de extremo se traducen en nuestra formulación en las expresiones ya dadas de las ecuaciones del movimiento.

Tendremos por inmediata traducción del principio clásico

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathrm{R} + \sum_i q_i r_i \right) dt = 0 \qquad (19)$$

Previamente a la búsqueda de las condiciones de extremo, creemos no es inoportuno insistir sobre cosas sabidas.

El formulismo anterior se refiere a la variación del valor de la integral, correspondiente a la variación de la trayectoria en el espacio fásico de $2n$ dimensiones, que para nosotros será el $(r_i; s_i)$. Esta variación de la trayectoria fásica real la suponemos obtenida a partir de la misma mediante una sucesión de desplazamientos virtuales, pero conservando las configuraciones inicial y final del sistema. Como los desplazamientos son virtuales (*), las trayectorias variadas tendrán correspondencia isocrona punto a punto con la real, la que consideraremos además biunívoca de trayectoria a trayectoria.

Con el artificio usual, podemos suponer las trayectorias variadas dependientes de un parámetro ε, tal que fijado el valor del mismo queda determinada la correspondiente trayectoria, y para $\varepsilon = 0$ obtenemos la real. Esto equivale a sumar al vector posición instantáneo de esta última otro vector $\varepsilon \vec{V}$ cuyas $2n$ componentes son

$$\varepsilon \mu_i (t) \; ; \; \varepsilon \eta_i (t) \qquad (i = 1, 2..., h)$$

Será en consecuencia (1)

$$\begin{aligned} s_i^* (t) &= s_i (t) + \varepsilon \eta_i (t) \\ r_i^* \quad &= r_i (t) + \varepsilon \mu_i (t) \end{aligned} \qquad (20)$$

(*) Con la salvedad de asignar un valor no nulo a las $\frac{d}{dt}\delta s$, etc., que tienen un significado particular como se verá.

donde las η_i; μ_i son funciones uniformes del tiempo y tales que se cumpla

$$\frac{\partial s_i^*(t_1)}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial s_i^*(t_2)}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial r_i^*(t_1)}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial r_i^*(t_2)}{\partial \varepsilon} =$$

$$= \eta_i(t_1) = \eta_i(t_2) = \mu_i(t_1) = \mu_i(t_2) = 0 \qquad (21)$$

Podemos evidentemente escribir

$$\delta s_i^* = \frac{\partial s_i^*}{\delta \varepsilon}\,\delta\varepsilon \qquad \delta r_i^* = \frac{\partial r_i^*}{\delta \varepsilon}\,\delta\varepsilon. \qquad (22)$$

Además

$$\dot{\eta}_i(t) = \frac{\delta \dot{s}^*}{\delta \varepsilon} \qquad \dot{\mu}_i = \frac{\delta \dot{r}^*}{\delta \varepsilon} \qquad (23)$$

Tras estas consideraciones preliminares, calcularemos la variación de la integral definida I (que es ahora función de ε).

$$\delta I(\varepsilon) = \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\int_{t_1}^{t_2} L\,dt\right)\delta\varepsilon =$$

$$= \left[\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \dot{s}_i}\frac{\partial s_i}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \dot{r}_i}\frac{\partial r_i}{\partial \varepsilon} + r_i\frac{\partial q_i}{\partial \varepsilon} + q_i\frac{\partial r_i}{\partial \varepsilon}\right) dt\right]\delta\varepsilon. \qquad (24)$$

donde por brevedad hemos omitido los asteriscos.

La integral del 3er. término de cada sumando se transforma como sigue

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(r_i\frac{\partial q_i}{\partial \varepsilon}\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\frac{\partial q_i}{\partial \varepsilon}\right)\frac{dp_i}{dt}\right]dt = \left| p_i\frac{\partial q_i}{\partial \varepsilon}\right|_{t_1}^{t_2} -$$

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial \varepsilon}\right)dt = -\int_{t_1}^{t_2} p_i\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \varepsilon}\,dt = -\int_{t_1}^{t_2}\left(p_i\frac{\partial s_i}{\partial \varepsilon}\right)dt$$

De acuerdo a la observación hecha anteriormente

$$\delta I(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_i\left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \dot{s}_i} - p_i\right)\delta s_i + \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \dot{r}_i} + q_i\right)\delta r_i\right]dt \qquad (25)$$

y como los δs_i, δr_i son independientes, queda como condición

(1) Usando un asterisco para las trayectorias variadas.

necesaria de extremo, por el lema fundamental del cálculo de variaciones

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s_i} - p_i = 0$$
$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r_i} + q_i = 0 \qquad (26)$$

que son precisamente nuestras expresiones (4).

Estas últimas serán en consecuencia la forma que adoptan las condiciones eulerianas de extremo en esta formulación.

El enunciado clásico de HAMILTON se traduce en este otro: "Cuando la función **R** coincide con la antes definida, la integral

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\mathbf{R} + \sum_i q_i r_i \right] dt$$

es estacionaria para intervalos cortos de tiempo".

EXTENSION DE LOS RESULTADOS PRECEDENTES

Nuestras ecuaciones han sido deducidas suponiendo que L era, con toda generalidad, función de las q_i, de las $\dot{q}_i$ y del tiempo. Esto equivale a establecer que si el potencial es de tipo SCHERING nuestras expresiones siguen siendo perfectamente válidas.

No ocurre lo mismo introduciendo una función disipativa del tipo de la de LORD RAYLEIGH.

$$F = F(s_i)$$

siendo

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial s_i}$$

la componente de la fuerza disipativa en la dirección i.

El lector verá inmediatamente que las ecuaciones del movimiento serán ahora

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s_i} - r_i + \frac{\partial F}{\partial s_i} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r_i} + s_i = 0 \qquad (27)$$

En general, de acuerdo a lo señalado más arriba tendremos la ventaja de poder tratar con esta formulación fuerzas dependientes de la velocidad como las de CORIOLIS y las electromagnéticas.

CASO EN QUE LAS FUERZAS NO DERIVAN DE UN POTENCIAL

Las correspondientes ecuaciones de LAGRANGE serán

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = R_i = \sum_i \overline{F}_i \times \frac{\partial \overline{R}_i}{\partial q_i}$$

$\overline{R}$: vector posición de la Fuerza

donde las $\overline{F}_i$ son todas las fuerzas que producen trabajo en un desplazamiento virtual del sistema.

Si hacemos

$$\mathbf{R}_1 = T - \sum_i r_i \dot{q}_i \qquad r_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\delta \mathbf{R}_i = \sum_i \frac{\partial T}{\partial s_i}\delta s_i + \frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i - r_i \delta \dot{q}_i - \dot{q}_i \delta r_i$$

y es inmediato que podemos escribir

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \dot{s}_i} &= r_i + \sum_i \overline{F}_i \times \frac{\partial \overline{R}_i}{\partial s_i} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \dot{r}_i} &= -s_i + \sum_i \overline{F}_i \times \frac{\partial \overline{R}_i}{\partial r_i} \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Nos quedarán en consecuencia estas últimas expresiones como las correspondientes ecuaciones del movimiento que son susceptibles de diversas simplificaciones sencillas análogas a las antes tratadas, y que dejamos a cargo del lector que se interese.

CASO EN QUE EL NUMERO DE PARAMETROS ES MAYOR QUE EL DE GRADOS DE LIBERTAD

Las ecuaciones pueden extenderse a estos sistemas holónomos con artificio muy sencillo.

Consideramos el sistema dinámico definido por **R** (función de los n pares de variables conjugados r_i; s_i.

Supongamos existan m relaciones $\psi_k(s_i; r_i) = 0$ entre los parámetros. Obviamente $2n > m$ pues sino no podría haber movimiento. (Con mayor precisión: para que el sistema dinámico pueda desplazarse con variación de los parámetros que figuran en las ecuaciones de condición, el número de los mismos deberá necesariamente ser mayor que el de ecuaciones de condición, suponiendo estas independientes entre sí).

Será

$$\frac{d}{dt}\,\delta\mathbf{R} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r_i}\,\delta r_i + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s_i}\,\delta s_i\right) =$$

$$= \sum_i \frac{d}{dt}(-q_i\,\delta r_i + p_i\,\delta s_i) = \sum_i \left(\frac{d}{dt}\,\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r_i}\right)\delta r_i +$$

$$+\left(\frac{d}{dt}\,\frac{\partial R}{\partial s_i}\right)\delta s_i = \sum_i (-s_i\,\delta r_i + r_i\,\delta s_i)$$

pues

$$\frac{d}{dt}\,\delta s_i = 0 \qquad \frac{d}{dt}\,\delta r_i = 0$$

para una variación virtual de los parámetros en sentido estricto.

Multiplicando las ecuaciones de condición por los multiplicadores de LAGRANGE, calculemos su variación total e igualemos a los términos de cada sumando de la expresión anterior, expresando así el hecho de la vinculación que existe realmente entre las variaciones de los parámetros (pues estos no son totalmente independientes).

Obtenemos pues

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r_i} + s_i &= \sum_k \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial r_i} \\ \frac{d}{dt}\,\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s_i} - r_i &= \sum_k \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial s_i} \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

en total $2n$ expresiones, que sumadas a las m ψ_k, permiten obtener las $2n + m$ incógnitas.

Expresiones formalmente análogas pero conceptualmente muy diferentes pueden obtenerse al generalizar nuestras ecuaciones al caso de los sistemas anholónomos.

En efecto, las ecuaciones de condición (que suponemos sean lineales en las derivadas temporales de los parámetros) serán de la forma

$$\psi_k = \left[\sum_i a_{k_i}\dot{s}_i + b_{k_i}\dot{r}_i\right] + c_k = 0 \tag{30}$$

con la característica conocida de ser expresiones no integrables.

Por análogo camino al caso anterior llegamos fácilmente a las expresiones

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s_i} - r_i &= \sum_k \lambda_k a_{k_i} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r_i} + s_i &= \sum_k \lambda_k b_{k_i} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Veremos para finalizar algunos ejemplos de aplicación.

Consideremos primeramente el caso de un oscilador lineal que definimos directamente por su Lagrangiano

$$L = \frac{mx^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \qquad k > 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = r = -kx \quad \therefore \quad x = -\frac{r}{k}$$

$$\mathbf{R} = L - qr = \frac{ms^2}{2} + \frac{r^2}{2k}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \dot{s}} = m\dot{s} = r$$

se obtiene

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r} = -\frac{r}{k} = \dot{s} \qquad ks + m\ddot{s} = 0$$

$$\therefore \qquad s = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + B\,\text{sen}\,\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

$$x = -\frac{m\dot{s}}{k} = C\,\text{sen}\,\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + D\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

Obsérvese que la función es homogénea y constituye por tanto una constante del movimiento, igual en este caso a la energía total, pués el Hamiltoniano no depende del tiempo y el Lagrangiano es del tipo "reversible" (carece de términos lineales en las derivadas).

Vamos a considerar un caso particular importante.

Supongamos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = r_i = \text{cte} \neq 0$$

de esto se sigue

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s_i} = c_1$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s_i} = c_1 t + c_2$$

que es una integral primera.

Como aplicación de esto último, estudiemos el movimiento del cilindro hueco de masa M y radio R, que rueda sin resbalar por un plano inclinado que forma un ángulo φ con la horizontal.

Tenemos

$$L = T - V = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + R^2\dot{\varphi}^2) + Mg\,(\text{sen}\,\alpha)\,x$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = r_1 = Mg\ \text{sen}\ \alpha = c_1$$

$$\mathbf{R} = \frac{M}{2}(s_1^2 + R^2 s_2^2) + Mg\,(\text{sen}\,\alpha)\,x - Mg\,(\text{sen}\,\alpha)\,x$$

$$\mathbf{R} = \frac{M}{2}(s_1^2 + R^2 s_2^2)$$

Nótese que hemos usado directamente la x pues se elimina de acuerdo a lo dicho anteriormente.

De acá se sigue

$$s_1 = c_1 t + c_2$$

Además debemos considerar la condición de rodadura (que en este caso es holónoma).

$$\psi = R\frac{d\varphi}{dt} - \frac{dx}{dt} = 0$$

y nos proporciona otra integral primera.

$$R\,s_2 - s_1 = 0$$

El problema quedará pues completamente resuelto si determinamos c_1. Para ello introducimos los parámetros de LAGRANGE.

Las ecuaciones del movimiento correspondiente son:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \dot{s}_i} - r_i = \lambda \frac{\partial \psi}{\partial s_i} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \dot{r}_i} + s_i = \lambda \frac{\partial \psi}{\partial r_i}$$

$$i = 1,\ 2$$

Solo necesitaremos las dos primeras

$$\text{a)} \quad M\ddot{s}_1 - r_1 = \lambda$$

$$\text{b)} \quad M R^2 \ddot{s}^2 = \lambda R$$

pero

$$r_1 = Mg \text{ sen } \alpha$$

Nos queda

$$M\ddot{s}_1 - Mg \text{ sen } \alpha + \lambda = 0$$

$$M R \ddot{s}_2 = \lambda$$

y en consecuencia

$$M\ddot{s}_1 = \lambda$$

considerando la condición de rodadura.

Reemplazando en la primera ecuación

$$2\, M\ddot{s}_1 = Mg \text{ sen } \alpha$$

$$\dot{s}_1 = \frac{g \text{ sen } \alpha}{2} = c_1$$

$$\lambda = \frac{M(\text{sen } \alpha)\, g}{2} \qquad s_1 = \frac{\dot{s}_1}{R} = \frac{g \text{ sen } \alpha}{2R} = \ddot{\varphi} = \text{cte}$$

(λ tiene el significado de reacción vincular que produce el rodamiento) que resuelven completamente el problema.

El caso del cilindro macizo homogéneo puede tratarse por análogo camino haciendo

$$T = \frac{M}{2}\left(\dot{x}^2 + \frac{R^2 \dot{\varphi}^2}{2}\right) = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{J\dot{\varphi}^2}{2}$$

MOVIMIENTO DEL YO-YO

Sea x la longitud del hilo desenrrollado en un instante cualquiera, M la masa del yo-yo, J su momento de inercia respecto a su eje geométrico y R su radio interior.

Tenemos que

$$T = \frac{1}{2}(M\dot{x}^2 + J\dot{\varphi}^2)$$

$$V = -Mg\,(\text{sen}\,\alpha)\,x$$

$$\psi = \frac{dx}{dt} - R\frac{d\varphi}{dt}$$

y donde α es el ángulo que forma el hilo en tensión con la horizontal.

Con lo anterior, vemos que el problema se resuelve en forma matemáticamente idéntica al cilindro macizo homogéneo que rueda por el plano inclinado.

λ será ahora la tensión en el hilo

$$\lambda = S = \frac{Mg\ \text{sen}\ \alpha}{1 + \frac{r^2}{i\,c^2}} < Mg$$

$i\,c$: radio de giro respecto al eje geométrico.

(Para un tratamiento clásico de este problema véase *Sommerfeld* "Mechanik").

CONCLUSION

Una opinión difundida sobre los métodos de solución de sistemas dinámicos, sostiene que una formulación dada será tanto más útil y perfecta cuanto más sistemas puedan ser integrados mediante ella. No compartimos este punto de vista, que consideramos resabio de etapas superadas dentro de esta Ciencia.

En efecto, un sistema dinámico integrable es un ente de ficción, una idealización de la Naturaleza, que abunda tanto en los tratados, como escasea en la realidad de los problemas técnicos. La Mecánica desde Poincare toma conciencia de este hecho, notando que no tiene sentido hablar de soluciones exactas cuando solo son aproximados los datos de los que se parte.

Abandonose pues el capricho ingenuo (e imposible de satisfacer) de reducir todo problema a cuadraturas, reconociendo que el análisis cualitativo de ecuaciones diferenciales que no se pueden resolver en el sentido clásico, o su tratamiento numérico, proporcionan tanta o más información de la que se necesita.

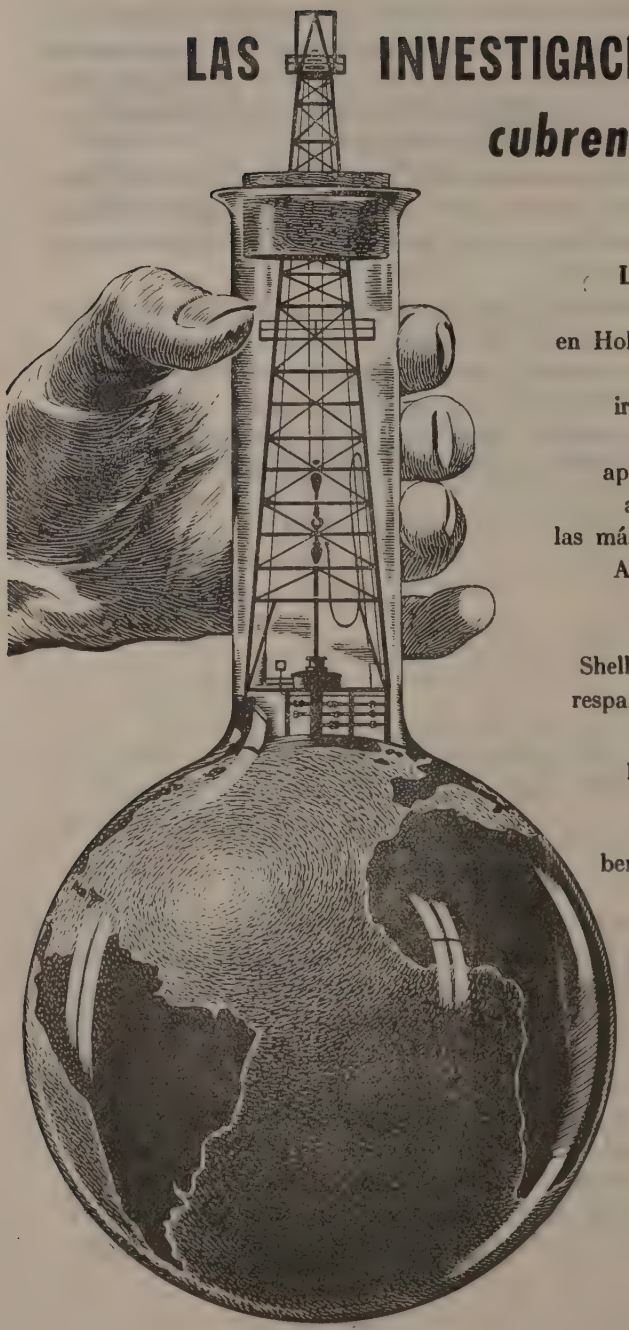
Atentos a esto último creemos que todo camino conducente a informaciones nuevas sobre los sistemas dinámicos será de utilidad. Su mayor o menor importancia dependerá exclusivamente de la calidad de las mismas.

En cuanto al punto de vista formal, todo aporte debe ser considerado, aún los pequeños, como el que nos ocupa.

Dedicamos este trabajo a nuestro querido maestro, Prof. Dr. Don Julio Rey Pastor a quien tanto debemos.

Agradecemos a nuestro amigo Ing. F. R. Marsicano el haber leído estas páginas mejorándolas con útiles sugestiones.

LAS INVESTIGACIONES SHELL
cubren el mundo



Los grandes centros de investigaciones Shell en Holanda, Estados Unidos y Gran Bretaña, irradian el fruto de sus trabajos para la aplicación cada vez más amplia del petróleo en las más diversas actividades. Así favorecen en forma constante al progreso de la humanidad. Shell opera con ese sólido respaldo de la organización internacional a que pertenece, la cual, por su intermedio, extiende sus valiosos beneficios a las distintas actividades de este país: Ciencia, Medicina, Agricultura, Industria, Hogar.

SHELL

COMPAÑIA ARGENTINA DE PETROLEO S. A.

TUNGSTENO (Oxido, Metal, Sales y Aleaciones). Minerales
ZINC ELECTROLITICO MARCA « METEOR » (Industria Argentina)
COBRE ELECTROLITICO - ZINC EN LINGOTES Y CHAPAS
PLOMO EN LINGOTES - ALUMINIO - ESTAÑO - ANTIMONIO
ALEACIONES - COBALTO METALICO 97/99 % - NIQUEL
ELECTROLITICO - MAGNESIO METALICO EN LINGOTES
ABRASIVOS - CUARZO - FELDESPATO - FLUORITA

BUENOS AIRES
AVDA. BELGRANO 1670

T. E. 37 (RIVADAVIA) 1026
Dirección Telegráfica « MINMET »

MINERALES Y METALES
S. A. Ind. y Com.

CRISTALERIAS
MAYBOGLAS
S. A. C. e I.

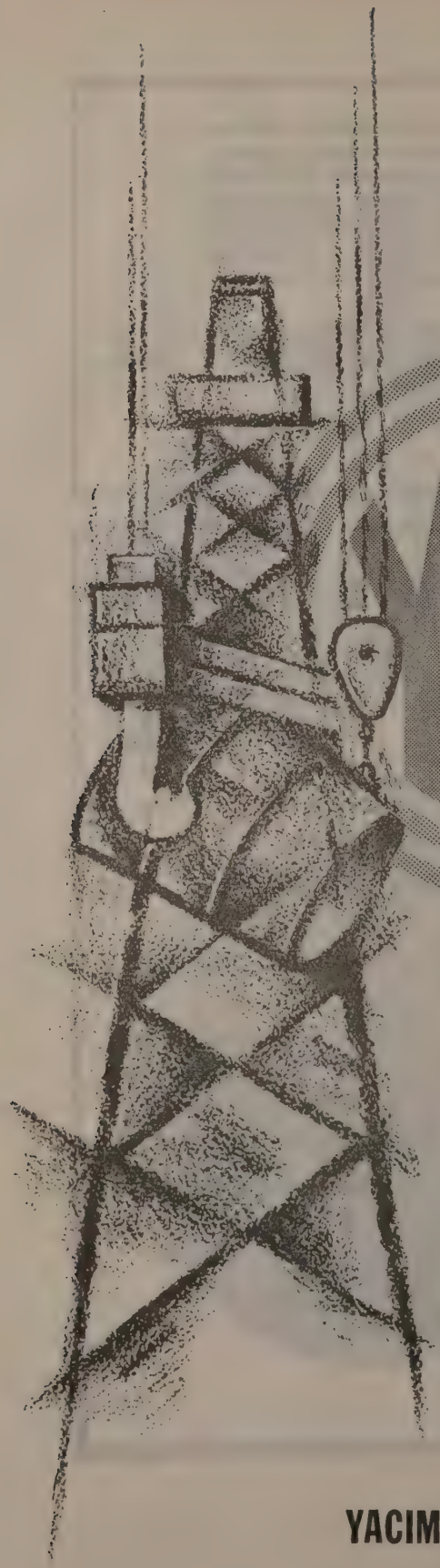
MyB
M. R.

ENVASES DE VIDRIO - TUBOS DE VIDRIO

Escritorio:
Cóndor 1625
T. E. 61-0212

Fábrica:
Tabaré 1630
T. E. 61-1480

DISPONIBLE



PETROLEO Y SIDERURGIA...

...forjando el

progreso argentino

YPF

SIERRA GRANDE

La grandeza de la industria siderúrgica argentina sólo podrá cimentarse con la explotación intensiva de las materias primas con que cuenta nuestro país.

La explotación de los yacimientos de hierro de Sierra Grande, similarmente al caso del petróleo, significará para la Argentina una notable economía en divisas.

Por eso es dable afirmar que
Petróleo y Siderurgia
están forjando la grandeza del país.

YACIMIENTOS PETROLIFEROS FISCALES

COMPAÑIA DE SEGUROS DE VIDA
SUD AMERICA
Av. R. SAENZ PENA 530 - BUENOS AIRES

Seguros de vida en vigor
$ 3.217.388.782,-- m/l.
Reservas Técnicas
$ 369.184.767,50 m/l.
Pagados a Asegurados y Beneficiarios desde 1923
$ 310.973.746,07 m/l.

WQT
WILLIAMS QUIMICA Y TECNICA S. A.
Comercial, Industrial, Inmobiliaria y Financiera

PRODUCTOS QUIMICOS y DROGAS INDUSTRIALES
MATERIAS PRIMAS PARA LA INDUSTRIA
INSECTICIDAS AGRICOLAS
PRODUCTOS DE:
THE DOW CHEMICAL CO.- MIDLAND, MICHIGAN, U. S. A.

Avda. Belgrano 1666/70 Buenos Aires T. E. 38, Mayo 9001

DISPONIBLE

Medio Siglo de vida argentina

1911... Con el primer cargamento de nafta y kerosene traído a bordo del velero "Hall", comienzan las actividades de la que luego sería la actual Esso Sociedad Anónima Petrolera Argentina.

1961... En el año de su Cincuentenario, Esso Sociedad Anónima Petrolera Argentina siente la satisfacción de haber recorrido un largo camino de realizaciones al servicio del progreso de la República y del bienestar de sus habitantes. Y lo celebra con el lema que es expresión de propósitos: **"Si es importante lo hecho, más importante es lo por hacer".**

50 ANIVERSARIO

Esso

SUVAMINA HC 30 -- SUAVIZANTE CATIONICO

ASPECTO

Pasta blanda de color claro.

COMPOSICION

Amonio cuaternario en dispersión acuosa al 25 %.

PROPIEDADES

- brinda un tacto suave y agradable
- es sustantivo
- mejora la resistencia a la suciedad
- acelera el secado
- facilita el planchado
- inhibe mohos y olores -es germicida
- brinda propiedades antiestáticas.

COMPATIBILIDAD

- con detergentes y humectantes no iónicos o catiónicos
- con agentes de acabado
  vegetales (almidones, dextrinas, gomas)
  animales (gelatina, cola)
  sintéticos (polivinílicos, uréicos, melamínicos, etc.).

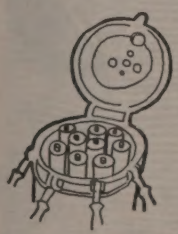
APLICACION

- concentración: 0,3 a 1 % sobre el peso de mercadería
- temperatura: 30 a 50 °C
- tiempo: 10 a 15 minutos.

PRESENTACION

Cascos de 50, 100 y 200 Kg.

Solicite la visita de nuestros técnicos -- Véase nuestro Folleto AC-101



AUXILIARES PARA TINTORERIA Y ESTAMPERIA

SUVAFIX D

Fijador de colorantes directos para fibras vegetales.

Véase n/Folleto AV 104.

ALCOIGAL NI

Retardante no iónico.

Véase n/Folleto NI 101

SUVALIC P

Solubilizante y fluidificante para pastas a base de almidones.

Véase n/Folleto AV 107

ANTIESPUMA FRANCVAL

Disponemos de distintos tipos de anti-espumantes.

DESMANCHADORES TEXTILES

DESMANCHADOR AS

producto a base de detergente emulsionante aniónico

DESMANCHADOR S

solvente especial con emulsionante no iónico

DESMANCHADOR ST

mezcla de disolventes con detergente emulsionante aniónico

DESMANCHADOR DC

mezcla de disolventes con detergente — emulsionante aniónico. Se recomienda también como detergente especial para limpieza a seco

DESMANCHADOR AST

mezcla de disolventes con detergente aniónico.

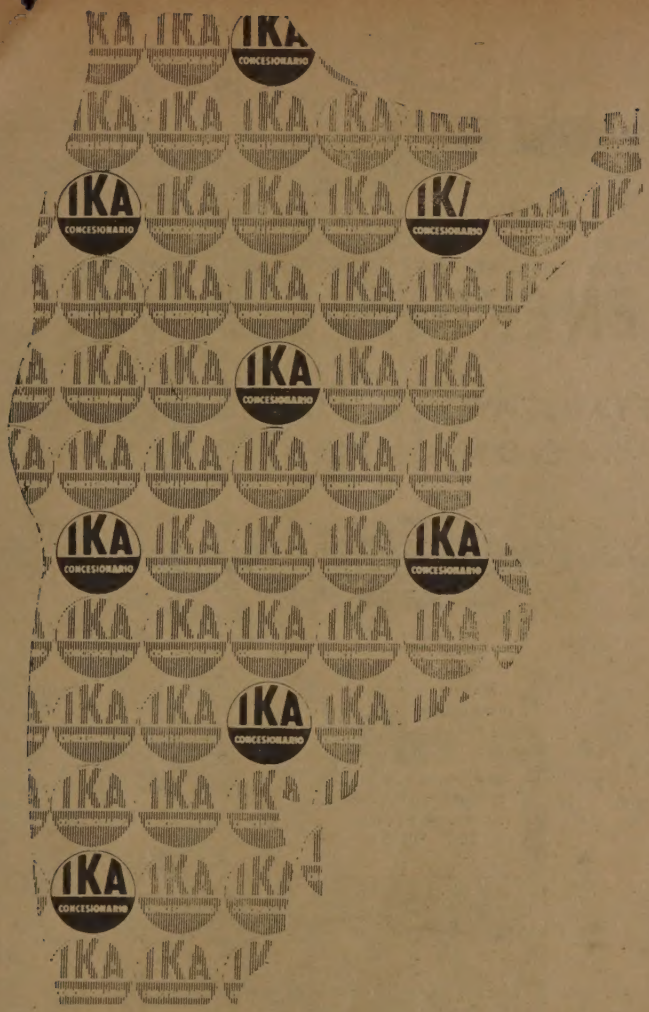
Véase n/Folleto AV 106

José Franchini Ltda.

S.C.I.R.L. - CAP. M$N 2.000.000-

CARABELAS 2398
TEL. 22-2356
AVELLANEDA

Experiencia y método científico son las normas que presiden la creación, fabricación y control de los medicamentos
CIBA



EN TODAS LAS RUTAS DEL PAIS!

El sello del Concesionario oficial de IKA, le señala en todas las rutas del país el lugar donde usted encontrará legítimos repuestos IKA, personal altamente especializado, servicio nocturno único en el mundo... y la habitual "cordialidad IKA"! En más de 260 puntos de la República, el sello "IKA-CONCESIONARIO" es el orgulloso emblema de la "red de seguridad" para la protección de su vehículo IKA... durante las 24 horas del día!

IKA
CONCESIONARIO

INDUSTRIAS KAISER ARGENTINA

Sobre la red caminera... una "red de seguridad"

Correo Argentino Central "B"
FRANQUEO PAGADO
Concesión Nº 1186
TARIFA REDUCIDA
Concesión Nº 6247

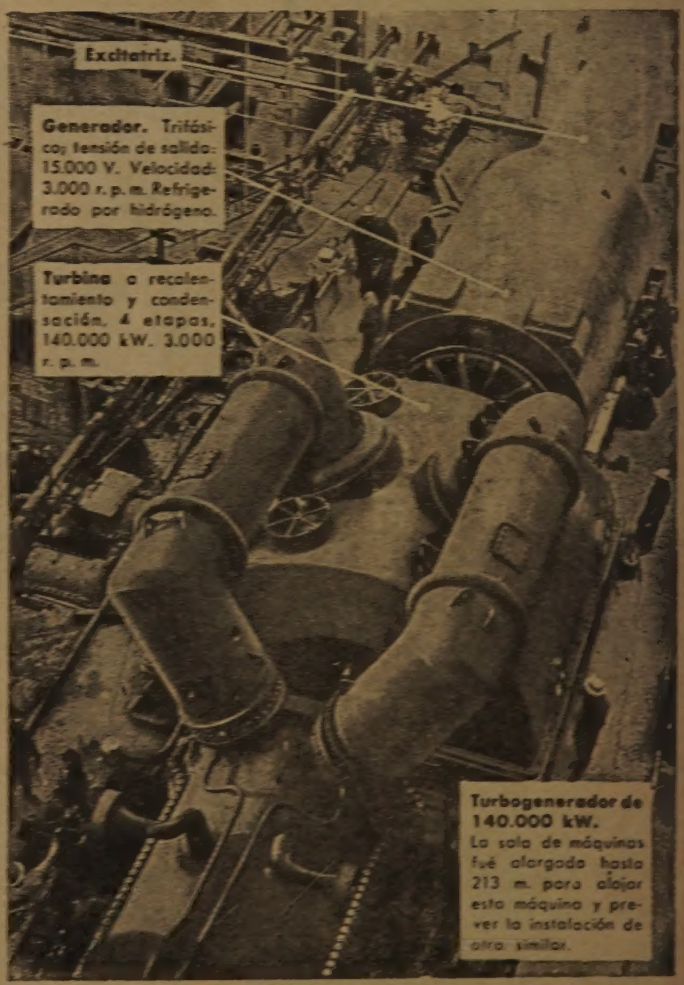
Hacia la normalización del servicio

MAS ENERGIA ELECTRICA...

PRIMERA ETAPA DE LA PUESTA EN MARCHA DE LA AMPLIACION CENTRAL PUERTO NUEVO

En **diciembre de 1958**, al iniciarse las obras de extensión de la Central de Puerto Nuevo, en la superficie que ahora ocupa la ampliación de la sala de máquinas y la estructura metálica de la caldera, sólo existían dos grandes lagunas y depósitos de cenizas que fueron evacuados.

En **diciembre de 1960**, con dos años de trabajo solamente, en que los esfuerzos técnicos y financieros de **Segba** se aplicaron al cumplimiento de los compromisos contraídos con el Gobierno Nacional, las obras de ampliación se encuentran en vías de terminación. En enero de 1961, a través de los canales e instalaciones ya terminadas, comenzó a circular agua de refrigeración de los condensadores. A esta primera etapa de la puesta en marcha de la ampliación de la Central Puerto Nuevo, seguirá, en forma progresiva, la puesta en funcionamiento de distintos elementos que forman parte del nuevo grupo, su caldera y accesorios. En febrero: primer calentamiento de la caldera.



Turbogenerador de 140.000 kW. La sala de máquinas fué alargada hasta 213 m. para alojar esta máquina y prever la instalación de otra similar.

SEGBA

SERVICIOS ELECTRICOS DEL GRAN BUENOS AIRES S. A.